Infinitesimal Deformation

<u>Idea:</u> 1950 Kodaira & Spencer

$(M, \mathcal{A})$ varietà complesse connessa (compatta)

$M = \bigcup \mathcal{U}_J$. Ora $\mathcal{U}_J \simeq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Posso trovare polidischi che ricoprono M.
(Paracompattezza)

$M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$
i) $\mathcal{U}_\alpha \simeq$ policilindro
ii) $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ localmente finito.

Allora la "struttura" di $(M, \mathcal{A})$ è in qualche modo determinata da $f_{\alpha\beta}: \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha$.
Vorremmo in qualche modo descrivere una tale variazione.

Famiglia Analitica Complessa

<u>Defn:</u>
Sia $B \subseteq \mathbb{C}^m$ un dominio. $\forall t \in B$ associamo M_t una n-varietà comp. (comp) connessa. $\{M_t\}_{t \in B} = (\mathcal{M}, B, \phi)$ è una f. anal. comp. se $\exists\ \phi: \mathcal{M} \twoheadrightarrow B$ t.c.

1) rank $d\phi = m$ $\forall p \in \mathcal{M}$
2) $\phi^{-1}(t)$ compatto e connesso in $\mathcal{M}$
3) $\phi^{-1}(t) = M_t$

B spazio base (dei parametri)
$\mathcal{M}$ spazio di deformazione.

Con paracompattezza + forma normale delle somm.
(thm f. implicita)

trovo carte $\{U_\alpha, z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "z_\alpha"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ U_\alpha \arrow[r, "pr_2"'] & B \end{tikzcd}$$

$z_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{m+n}$ è la mappa su

$$z_\alpha(p) = (z_\alpha^1(p), \dots, z_\alpha^n(p), t_1, \dots, t_m)$$

$$\phi(p) = (t_1, \dots, t_m) = \underline{t} \in B.$$

Allora possiamo anche "coordinare" M_t con $\{U_J \cap \phi^{-1}(t) ; U_J \cap \phi^{-1}(t) \neq \emptyset\}$ in coordinate locali ϕ è la proiezione.

I polidischi $\{V_\alpha\}$ vengono incollati con

$$f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$$

OSS: in massima generalità possiamo togliere hp. di compattezza e B può essere una varietà complessa connessa a caso.

Esempi: i) $(M, B, \phi) = (M \times B, B, pr_2)$ fissata M v. comp. $\mathbb{C}P^1_t$

ii) $((\mathbb{C} \times H_+)/G, H_+, \pi)$ dove $G < Aut(\mathbb{C} \times H_+)$

$$G = \langle g_{mn} : (z, w_1) \mapsto z + m w_1 + n \quad m, n \in \mathbb{Z} \rangle$$

1-tori complessi.

iii) Superfici di Hopf

Defn: M, N varietà complesse sono una def. dell'altra se $\exists\ (M, B, \phi)$ t.c. $\phi^{-1}(t_0) = M$ e $\phi^{-1}(t) = N$ per $t \in B$.

Defn: Equivalenza di famiglie analitiche
$(M, B, \phi) \simeq (N, B, \psi)$ sono equivalenti se

$\exists$ biolomorfismo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \text{t.c. } \phi = \psi \circ \Phi$$

Defn: $(\mathcal{M}, B, \phi)$ è banale se è equivalente a una famiglia banale $(M \times B, B, pr_2)$ per qualche M.

Defn (localmente banale) $(\mathcal{M}, B, \phi)$ è localmente banale se $\forall t \in B$, $\exists I \subseteq B$ tale che $t \in I$ e la famiglia

$$(\phi^{-1}(I), I, \phi) \text{ è banale.}$$

esempio famiglia non banale $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \pi_1)$ $\forall n > 0$ non può essere equivalente alla fam. BANALE $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \pi_2)$ perché $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ è semp. conn. ma

$$\pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}.$$

Thm: $(\mathcal{M}, B, \phi)$ famiglia analitica complessa.

$t_0 \in B \Rightarrow \forall t \in B \Rightarrow M_{t_0} \simeq_{\text{diffeo}} M_t$.

pf: (sketch) DIM 1 poi segue perché è vero coordinata per coordinata.

Ora su ogni U_α che parametrizzano M_{t_0} considero

$$\sum_{j=1}^{n} v_\alpha^j(x_\alpha, t_1) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} + \frac{\partial}{\partial t_1}$$

indichiamo il campo vettoriale $\partial/\partial t_1$ su U_γ come

$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_\gamma$

Da fare bene

Idea: Vorremmo quindi poter dire qualcosa e definire una DERIVATA

$\frac{\partial}{\partial t} M_t$ che metta in relazione le strutture complesse di una famiglia.

DOVREBBERO VALERE: i) $\frac{\partial}{\partial t} M_t \Big|_{t=b} = 0 \Rightarrow$ localmente banale in b

ii) localmente banale $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} M_t = 0$.

Abbiamo detto che $(M, \mathcal{A})$ è determinato da $f_{\alpha\beta}$. forse va bene $\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial t}$?

esempio: $M = \bigcup_{t \in \mathbb{C}^*} (\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \{t\}) = \{\mathbb{C}\mathbb{P}^1_t \mid t \in \mathbb{C}^*\}$

Q: in un certo senso sono sfere di raggio diverso?

$\mathbb{C}\mathbb{P}^1_t = \mathcal{U}_0^t \cup \mathcal{U}_1^t$

$z_0 : \mathcal{U}_0 = \{[N_0, N_1] \mid N_0 \neq 0\}$ $\quad z_0 = \frac{N_1}{N_0} \cdot t$

$z_1 = \frac{N_0}{N_1} \cdot t$

mappe di transizione sono

$$z_0 = f_{01}(z_1, t) = \frac{t^2}{z_1}$$

ma allora $\frac{\partial f_{01}}{\partial t} = \frac{2t}{z_1} \neq 0$ ma le coordinate sono tutte uguali quindi

$$\mathbb{CP}_1^t \simeq \mathbb{CP}_1 \quad \forall t \in \mathbb{C}^*$$

OSS: $\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial t}$ non è obb. "preciso"

OSS: (M, B, ϕ) f. $M_t = \phi^{-1}(t)$ è paramet.

$$U_\alpha \xrightarrow{z_\alpha} \mathbb{C}^n \times B$$

$$z_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(z_\beta(p))$$
$$= f_{\alpha\beta}(z_\beta, t)$$
$$= (f_{\alpha\beta}(z_\beta, t), t)$$

M_t è "coordinato" da $z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, t)$

$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, t)$ ma allora

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, t) = f_{\alpha\gamma}(f_{\gamma\beta}(z_\beta, t), t)$$

CHAIN RULE

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial t}(z_\beta, t) = \frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial t}(z_\gamma, t) + \frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial z_\gamma}(z_\gamma, t) \cdot \frac{\partial f_{\gamma\beta}}{\partial t}(z_\beta, t)$$

OSS: $z_\alpha = f_{\alpha\gamma}(z_\gamma, t)$ ma allora

$$\frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial z_\gamma} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma}$$

Def: $\theta_{\alpha\beta}(p) = \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial t}(z_\beta, t)\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}(f_{\alpha\beta}(z_\beta, t))$

è un campo olomorfo su $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap M_t$

$=: \mathcal{U}_{\alpha_t} \cap \mathcal{U}_{\beta_t}$

vale anche la condizione di cociclo

lemma: $\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\gamma} + \theta_{\gamma\beta}$ su $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$

pf: $$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial f_{\gamma\beta}}{\partial t}\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$$

$$= \frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial f_{\gamma\beta}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_\gamma}$$

ma allora se $\beta = \alpha$ si ha

$$\theta_{\beta\beta} - \theta_{\beta\gamma} - \theta_{\gamma\beta} = 0 \quad \text{ma}$$

$$\theta_{\beta\beta} = \frac{\partial f_{\beta\beta}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_\beta} = 0 \Rightarrow \theta_{\beta\gamma} = -\theta_{\gamma\beta}$$

oss: $\{\theta_{\alpha\beta}(t)\}$ forma un 1 co-ciclo del fascio dei germi di campi vettoriali olomorfi Θ_t su M_t

$$\theta(t) \in \check{H}^1(\{\mathcal{U}_\alpha \cap M_t\}, \Theta_t) \subseteq \check{H}^1(M_t, \Theta_t)$$

prop: $\dfrac{\partial M_t}{\partial t}$ non dipende dai dati locali.

pf (sketch): $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento di $\mathcal{M}$ in un intorno di $M_t = \phi^{-1}(t)$ $f_{\alpha\beta}(z_\beta, t)$ e so

$\{V_p\}_{p\in P}$ $g_{pq}(\zeta_q, t)$ ottiene sulle int.

$\theta_{pq} - \theta_{\alpha\beta}$ è un cobordo.

Ora senza perdita di generalità considero

$$V_p \subseteq U_{\alpha(p)} \qquad \alpha : P \to A$$

ora definisco $h_{(\alpha(p))}$

$$z_{\alpha(p)} = h_{\alpha(p)}(\zeta_p, t) \quad \text{ponendo}$$

$$\theta_p = \frac{\partial h_{\alpha(p)}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(p)}} \quad \text{per la Chain Rule}$$

$$\theta_{pq} - \theta_{\alpha\beta} = \theta_p - \theta_q \; \blacksquare$$

prop: Se M è localmente banale in un intorno di $b \in B \Rightarrow \left.\frac{\partial M_t}{\partial t}\right|_{t=b} = 0$

pf: $\Delta_b \subseteq B$, $b \in \Delta_b$ t.c. $\phi^{-1}(\Delta_B) \simeq M_b \times \Delta_b$
in queste carte

$$f_{\alpha\beta}(z_\beta, t) = (f_{\alpha\beta}(z_\beta), t) \quad \text{ma allora}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = 0 \; \blacksquare$$

ex $(\mathbb{C}P^1_t)$ $\quad \frac{\partial f_{01}}{\partial t} = \frac{2t}{z_1} \qquad \frac{\partial f_{01}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_0} = \frac{2t}{z_1} \frac{\partial}{\partial z_0}$

$$\frac{\partial z_0}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{t^2}{z_1}\right) = -\frac{t^2}{z_1^2} \; ; \; \frac{t}{z_0} = \frac{z_1}{t}$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_0} = -\frac{t^2}{z_1^2}\frac{\partial}{\partial z_0}$$ ma allora

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_0} = 2\frac{z_0}{t}\frac{\partial}{\partial z_0} = -2\frac{z_1}{t}\frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$= \frac{z_0}{t}\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{z_1}{t}\frac{\partial}{\partial z_1} = \theta_{01} = \theta_0 - \theta_1$$

$$\theta_\alpha = \frac{z_\alpha}{t}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \Rightarrow d/dt(\mathbb{C}P^1_t) = 0$$

? $\left.\frac{\partial M_t}{\partial t}\right|_{t=b} = 0 \Rightarrow$ M loc. banale in b.

Superficie di Hopf

NOTA: toro $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright$ reticolo ma anche

$\mathbb{C}^*/G^*$ $\quad G^* = \{ g^*_m : z \mapsto \alpha^m z \; ; \; \alpha = e^{2\pi i \tau} \; ; \; m \in \mathbb{Z} \}$

è isomorfo a $\mathbb{C}/G$ $\quad L(\tau) = \{ n + m\tau \; ; \; n, m \in \mathbb{Z} \}$

$G^* \curvearrowright$ prop. discontinuo su $F^* = \{ z \in \mathbb{C}^* \; |\alpha| \leq |z| \leq 1 \}$
senza pt. fissi

oss $\Im m(\tau) > 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$

Così come per i reticoli massimali possiamo generalizzare a n dimensioni, otteniamo

Hopf Surfaces   Hopf man dim 2

G il gruppo ciclico di Aut

$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_1, \dots, \alpha_n z_n)$ di $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

con $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $|\alpha| \neq 1$

$G \curvearrowright \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ in maniera prop. disc. senza punti fissi

$M = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) / G$ Hopf Manifold

$(M \cong S^1 \times S^{2n-1}$ non sono mai Kahler)
non è ~~algebrico~~ proiettivo

Ora vogliamo creare una famiglia non banale su

$S^1 \times S^3$ fisso $\alpha, t \in \mathbb{C}$ $0 < |\alpha| < 1$

$g_t : (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2)$

questo è un automorfismo di $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ genera

$G_t \curvearrowright_{\text{prop. s.p.f.}} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

$M_t := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / G_t$ è Hopf.

È UNA FAMIGLIA ANALITICA: $g : (z_1, z_2, t) \mapsto (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2, t)$

auto di $(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})\times\mathbb{C}$ e genera $G_t \curvearrowright \mathbb{C}^2\setminus\{0\}\times\mathbb{C}$.

$M = \sim$ è una varietà; la $pr_{\mathbb{C}}$ commuta con $g \Rightarrow \phi: M \to \mathbb{C}$.

Lo jacobiano ha rango 1 ovunque e quindi è f.o.c. che fibra su $t\in\mathbb{C}$.

Sia $t \in \mathcal{U} = \mathbb{C}\setminus\{t\}$ $\quad g_t = \begin{bmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

e meno di coniugio per

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \text{ diventa } \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \; g_1.$$

Ma allora la restrizione $(M, \mathbb{C}, \phi)$ a $\mathcal{U}$ è equivalente a M_1. $\forall t\neq 0$ ha stessa struttura.

FATTO: (Kodaira, Spencer) $\dim \check{H}^0(M_t) \wedge H^1 = \begin{cases} 4 & t=0 \\ 2 & t\neq 0 \end{cases}$

Jump Phenomena

Def: Sia (M, B, ϕ) f.o.c. la mappa infinitesimale di KS è la f. $\mathbb{C}$ lineare

$$\rho_t : T_tB \mapsto \check{H}^1(M_t, \Theta_t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial M_t}{\partial t}$$

sia $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$s \mapsto s^2$

$$p_s(\partial/\partial s) = \frac{dM_{s^2}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dM_t}{dt} = 2s\frac{dM_t}{dt}$$

$s \neq 0$ $t = s^2 \in U \setminus \{0\}$ ma allora

$p_s(\partial/\partial s) = 0$ per $s \neq 0 \Rightarrow p_0 = 0$.

⚠ K.S. è 0 ma non è loc. banale.

Def: (M, B, ϕ) è regolare se $\dim \check{H}^1(M_t, \Theta_t)$ è lo stesso $\forall t \in B$.

Thm: (M, B, ϕ) f. analitica $\mathbb{C}$ $M_t = \phi^{-1}(t)$ regolare, $p_t = 0$ $\forall t \Rightarrow (M, B, \phi)$ è loc. banale.

dim: $m = 1$ (M, B, ϕ) localmente (M_I, I, π) $\{V_\alpha \times I\}_\alpha$

$\Theta(t) = 0$ ma allora esiste una $\overset{0-}{\text{cocatena}}$

$$\Theta_{\alpha\beta}(t) = \Theta_\beta - \Theta_\alpha \quad \text{in coordinate}$$

$$\sum_j \frac{\partial f^j_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z^j_\beta} = \Theta^j_\beta \frac{\partial}{\partial z^j_\beta} - \Theta^j_\alpha \frac{\partial}{\partial z^j_\alpha}$$

ora chiamiamo $(\partial/\partial t)_\alpha$ su $V_\alpha \times I$.

$$V_i = -\sum_{j}^{n} \theta_\alpha^j (z_\alpha, t) \frac{\partial}{\partial z_\alpha^j} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\alpha$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \theta_\beta^j (z_\beta, t) \frac{\partial}{\partial z_\beta^j} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\beta$$

se $\check{H}^1(M_t, \Theta_t)$ non dipende da t lo prendo olomorfo su M_I $\Rightarrow$ calcolo il flusso $\square$